MATICES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Marcela Parraguez, Raúl Jiménez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad Católica del Norte. (Chile)

marcela.parraguez@pucv.cl, rjimen@ucn.cl

RESUMEN: La presente investigación se centra en el análisis de la construcción mental de los conceptos básicos del álgebra lineal, una vez finalizado un proceso de instrucción a estudiantes universitarios chilenos. Por una parte, consideramos los elementos teóricos y analíticos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración de los conceptos caracterizada por elementos matemáticos. Los resultados indican que tematizar el esquema conceptos básicos del álgebra lineal es difícil de lograr, porque las conexiones entre las componentes que están formando el esquema del estudiante no son correctas o adecuadas.

Palabras clave: álgebra lineal, teoría APOE, tematización

ABSTRACT: This research focuses on the analysis of the mental construction of the basic concepts of linear algebra, once a process of education to Chilean university students has been completed. On the one hand, we consider the theoretical and analytical elements proposed by the action, process, object, and scheme (APOS) theory in relation to the thematic arrangement of a scheme and; on the other hand, the layout of the concepts characterized by mathematical elements. The results indicate that the thematic arrangement of the scheme of linear algebra basic concepts is difficult to achieve because the connections between the components that are taking part of the student's scheme are not correct or adequate.

Key words: **:** Linear Algebra, APOS Theory, thematic arrangement

Introducción

El álgebra lineal, es sin lugar a duda, uno de los elementos fundamentales y estructurantes de la formación matemática de un profesional –nadie discute su importancia– y es por ello que está incluido en los currículos tanto de matemáticas como del área científica. Sin embargo, a pesar de la importancia del álgebra lineal, hay un problema aún sin solución y es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de los conceptos básicos del álgebra lineal. Esta complejidad presente en la comprensión de los conceptos básicos del álgebra lineal –espacio vectorial, combinación lineal, dependencia e Independencia lineal, subespacio generado, base, dimensión, transformación lineal, valores y vectores propios– ha motivado a varios investigadores a abordar la problemática desde diversos planteamientos teóricos aportando información que sin duda, ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo del currículo de álgebra lineal y específicamente sobre los conceptos básicos. Sin embargo, se hace necesario ahondar aún más en la compresión que los estudiantes logran construir de los conceptos básicos del álgebra lineal, una vez acabado un proceso de instrucción, considerando la abstracción que configura a estos tópicos.

La Teoría APOE

El presente trabajo considera los aportes teóricos y analíticos planteados por la Teoría APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros, & Weller, 2014), los cuales nos han permitido describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un estudiante durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático.

La teoría APOE (acrónimo de las construcciones mentales Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget, para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos.

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción acción de dicho concepto, si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Esto último en el sentido de que cada paso de la transformación requiere realizarse de forma explícita y guiados por instrucciones externas que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer. Cuando las acciones se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas y deja de depender de las instrucciones externas adquiriendo control interno sobre lo que hace (o imagina), decimos que el estudiante ha interiorizado la acción en un proceso. La construcción mental proceso se caracteriza por la capacidad del estudiante para imaginar la ejecución de los pasos a seguir en una actividad matemática, sin tener necesariamente que llevar a cabo cada uno de ellos explícitamente, pudiendo incluso prescindir de alguno de ellos; más aún él realiza transformaciones a un objeto matemático totalmente en la mente, sin la necesidad de ir a través de cada paso. Por otra parte, dos o más procesos pueden coordinarse para construir un nuevo proceso y un proceso puede revertirse o generalizarse. Si el estudiante rigidiza el dinamismo propio de un proceso en un estado sobre el cual puede aplicar acciones sin que éste se derrumbe, y se logre entender el proceso como un todo ligado, de modo que él mismo puede construir transformaciones sobre el objeto matemático, entonces se dice que el estudiante ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Además, si él necesita volver desde el objeto al proceso que le dio origen, se dice que ha desencapsulado el objeto en un proceso (las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de realizar acciones sobre procesos que no han sido encapsulados). Un esquema de un concepto matemático, es una colección de acciones, procesos, objetos y esquemas de otros conceptos, relacionados en la mente del estudiante como una estructura cognitiva coherente. Es importante hacer notar que la coherencia es entendida como la capacidad del estudiante para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el estudiante evoca un esquema y lo desenvuelve (destematizarlo) para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones sobre ellas, y trabaja con el conjunto. Ahora bien, dependiendo de la exigencia conceptual que posea un problema o actividad matemática, es posible que un sujeto se vea en la necesidad de hacer modificaciones a sus esquemas, para así responder satisfactoriamente. Esto implica que los esquemas no son estáticos y que están en constante reestructuración (tematización).

Para el objetivo de nuestro estudio se han considerado los aportes de la teoría relacionados con la tematización de un esquema, la cual según Cooley, Trigueros y Baker (2007) implica la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. En este mismo sentido y en relación a la tematización del esquema conceptos básicos del álgebra lineal se consideran, por una parte, los aportes realizados por Baker, Cooley y Trigueros (2000) que indican que la tematización puede observarse cuando un estudiante es capaz de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva (modificación de condiciones de las actividades del cuestionario) y, por otra, los resultados de García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que mencionan que la tematización del esquema puede observarse cuando un estudiante es capaz de establecer correctamente conexiones entre las componentes que están conformando su esquema conceptos básicos del álgebra lineal. Desde esta perspectiva entran en juego la tríada de Piaget y García (1989): Intra, Inter y Trans. Estos tres niveles de esquema corresponden al nivel de coherencia o conexión que se establecen entre las acciones, procesos y objetos del esquema. En el nivel Intra, un estudiante posee las construcciones mentales de un concepto sin establecer relaciones entre ellas. En segundo nivel, Inter, ya se han formado tales relaciones y algunas de ellas son coherentes. En el nivel Trans las relaciones son totalmente coherentes y el estudiante piensa en un concepto matemático como un todo integrado.

Objetivos de investigación

La presente investigación se propuso los siguientes objetivos generales: (1) Indagar en las construcciones mentales que puede utilizar un aprendiz como una estrategia cognitiva para construir el esquema de conceptos básicos del álgebra lineal; y, (2) Describir y caracterizar los niveles del esquema conceptos básicos del álgebra lineal en pro de su tematización.

Sobre la metodología de investigación

Metodológicamente la investigación se ha sustentado en un estudio de caso (Stake, 2010) que lo conformaron 25 estudiantes universitarios trabajados como casos, de los cuales, 17 eran estudiantes de segundo año de Ingeniería y los otros 8 pertenecían al tercer año de Licenciatura en Matemáticas. Es importante destacar que todos los estudiantes poseían instrucción previa en álgebra lineal.

Sobre los instrumentos aplicados

El primer instrumento aplicado al caso de estudio correspondió a un cuestionario en el cual se planteaban tres actividades, con la intensión de recopilar evidencias sobre la comprensión de los conceptos básicos del álgebra lineal, a través de la resolución de tareas que la actividad matemática demanda al resolutor, interpretadas éstas como el uso de los elementos matemáticos que configuran el esquema de los conceptos básicos en cuestión, tales como: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación. Presentamos a modo de ejemplo la actividad 2, pues en ella se reflejan varios de los conceptos básicos del álgebra lineal y porque además desprovee a los estudiantes de las algoritmias propias que ellos vienen utilizando para dar respuesta a otras actividades de su proceso de instrucción y por sobre todo impulsa al resolutor a hacer uso de las estructuras generales propias del álgebra lineal.

Actividad 2

Sea $V = \{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3 / \, x, y, z > 0\}$ un espacio vectorial con las operaciones:

SUMA : $u \oplus v = (xa, yb, zc)$ con $u = (x, y, z)$, $v = (a, b, c)$ en *V*

PONDERACIÓN: $\lambda \odot u = \left(x^{\lambda}, y^{\lambda}, z^{\lambda}\right)$ con $u = (x, y, z)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea *W* el subespacio de los puntos de *V* situados sobre el plano $Z = 1$.

¿El conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3,1\right)\right\}$ es base para *W*?

Sobre el análisis de los datos

Como primer paso se realizó un análisis de las respuestas de los 25 estudiantes a cada una de las actividades propuestas en el cuestionario, considerando como criterio de valoración, la completitud de cada una de las actividades y de la secuencia en general. A partir de este análisis se redujo el número de sujetos de estudio a nueve casos los que clasificamos en los distintos niveles comprensión del esquema. Posteriormente, nos centramos en el análisis de tres estudiantes que denominamos E1, E3 y E4 los cuales fueron clasificados en un nivel de comprensión distinto del esquema y manifestaban características que nos permitían inferir una posible tematización del mismo, a ellos les aplicamos las entrevistas clínicas. Con la información obtenida por medio del cuestionario y las entrevistas clínicas logramos mostrar que los estudiantes que habían tematizado el esquema conceptos básicos del álgebra lineal mostraban coherencia y flexibilidad al responder y argumentar correctamente a las modificaciones de las condiciones de las tareas en las distintas actividades planteadas, sin embargo, se observaron discrepancias en el uso que los estudiantes hacían de los conceptos básicos, mostrando diferencias en la forma de establecer y argumentar dichas relaciones, lo cual nos permitió definir tres tipos de conexiones que hemos denominado como conexiones: *inicial, indirecta y directa.*

Específicamente con relación a la actividad 2, en la figura 1 se observa, en la respuesta del estudiante E3, que éste determina por simple inspección (conexión directa operación binaria y su elemento neutro) el elemento neutro para la suma no usual en $\mathbb{R}^3$, lo que evidencia una concepción *esquema inter* de espacio vectorial, tematizado en el objeto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, a través de las propiedades algebraicas de las operaciones que están definiendo al espacio vectorial dado.

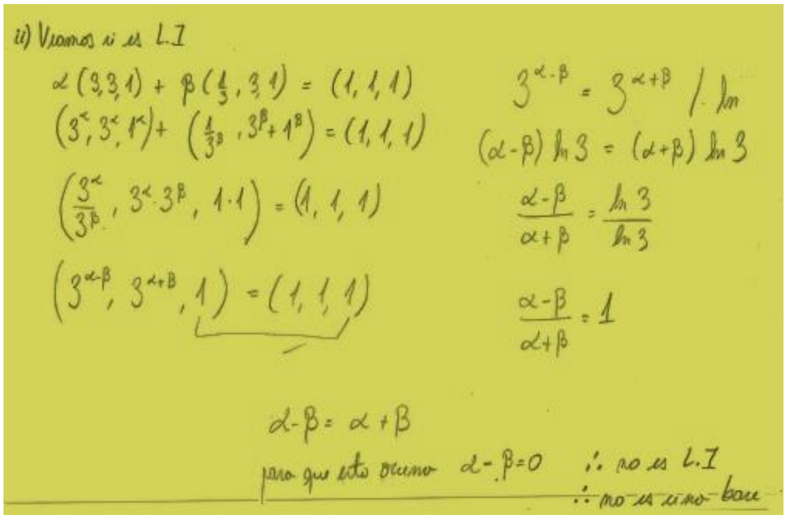

Figura 1*.* E3 verificando si un conjunto dado es una base del espacio vectorial W con operaciones no usuales

Por otro lado, dado que E3 no plantea correctamente el sistema de ecuaciones concluye erradamente que el conjunto no es linealmente independiente, esto evidencia una concepción proceso de sistema de ecuaciones lineales. Por otro lado no logra establecer que un punto cualquiera del plano *Z =1* tiene forma (*x, y,* 1) y que se puede descomponer como (*x,y,*1) = *ln(x)*(*e,*1,1) + *ln(y)*(1,*e,*1). Luego los vectores (*e,* 1, 1) y (1*, e,* 1) son linealmente independiente y generan al plano Z = 1.

En la figura 2 se aprecia la respuesta de otro estudiante, E4, que intenta establecer si los vectores específicos generan al subespacio *W*. Si bien no lo explicita, se apoya en la forma del vector generado, pero no muestra alguna propiedad (conexión inicial entre espacio generado y vectores generadores) que haga ver como la primera y segunda componente de dicho vector considera a todo $\mathbb{R}^{+}$. Por otro lado E4 asume que el plano Z = 1 tiene dimensión 2, lo que le hace establecer finalmente que el conjunto de los dos vectores específicos de *W* lo generan. Esto evidencia que el *esquema intra* conceptos básicos del álgebra lineal se ha tematizado en el objeto conjunto generador de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3}$.

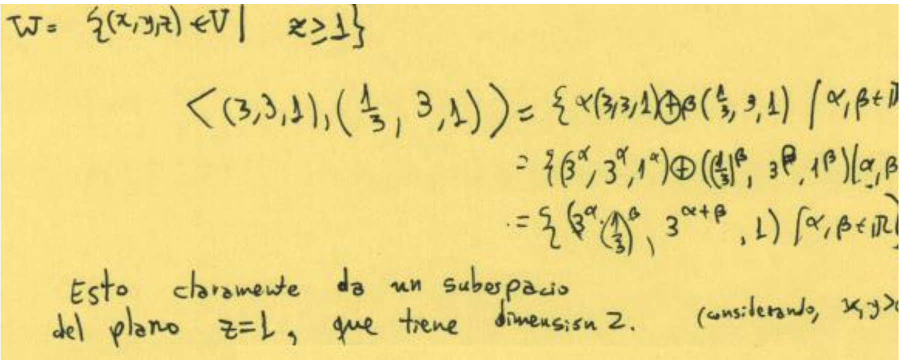

Figura 2. Respuesta de E4 con base en vectores generadores

En la figura 3, se aprecia una variante que realizó el estudiante E1 respecto de los procedimientos anteriores, para determinar si el conjunto de los dos vectores es una base de *W*. E1 trata de ver si un vector es la ponderación escalar del otro vector. Al respecto se refiere *"no son múltiplos"*, esto evidencia la importancia del concepto múltiplo escalar en la concepción objeto ponderación por escalar, como operación externa y un aspecto clave en la conexión directa de la operación interna (suma) y externa (ponderación) en la tematización del *esquema trans* de los conceptos básicos del álgebra lineal en el objeto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3}$.

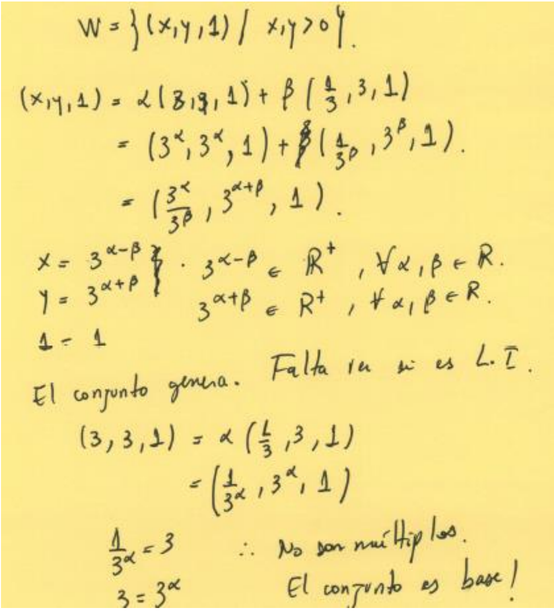

Figura 3. Procedimientos que utiliza el estudiante E1 para establecer que el conjunto de los dos vectores es una base de W bajo operaciones no usuales

En la figura 4 se aprecia como otro de los estudiantes, E5, al escribir la combinación lineal de vectores, pone de manifiesto operaciones usuales del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, que no se corresponden con las operaciones definidas en la actividad 2. Esto evidencia que no hay una concepción esquema espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, aunque hay indicios de una concepción proceso espacio vectorial $\mathbb{R}^3$para operaciones usuales.

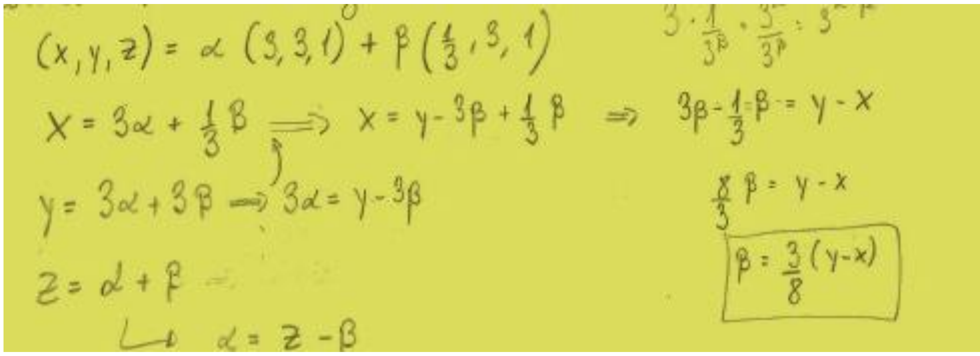

Figura 4. E5 trabaja la actividad 2 con otras operaciones de $\mathbb{R}^3$

Por otro lado el estudiante E5 recurre a procedimientos que están basados en una definición y una estrategia de ensayo y error, al establecer si un elemento cualquiera de *W* se puede escribir como combinación lineal, evidenciado una concepción proceso base de un espacio vectorial y proceso de sistema de ecuaciones lineales, al no relacionar la combinación lineal con la solución del sistema de ecuaciones.

Los resultados indican que lograr tematizar el esquema conceptos básicos del álgebra lineal en una construcción objeto luego de finalizado un proceso de instrucción, no es fácil, lo cual queda de manifiesto en que de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en álgebra lineal, solo tres pudieron lograrlo.

A modo de conclusión

Los resultados indican que los matices de la tematización de los conceptos básicos del álgebra lineal, en el concepto espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, lucen como en la Tabla 1.

Tabla 1. *Matices de la tematización de los conceptos básicos del álgebra lineal en el objeto espacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

Etapa Intra-EV de $\mathbb{R}^3$	***Etapa Inter-EV de*** $\mathbb{R}^3$	***Etapa Trans-EV de*** $\mathbb{R}^3$
El cero vector es la n-upla (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$*.* ***Proceso***	*El cero vector no necesariamente es el (0,0,0) de* $\mathbb{R}^3$*.* ***Objeto***	*Reconoce cuando un conjunto con dos operaciones es un EV de* $\mathbb{R}^3$ *y cuando no, recurriendo a estructuras subyacentes.* ***Objeto***
Para chequear si dos vectores de $\mathbb{R}^3$ *son Linealmente independiente/dependiente se iguala la Combinación Lineal a (0,0,0).* ***Proceso***	*Para chequear si dos vectores de* $\mathbb{R}^3$ *son Linealmente independiente/dependiente se iguala la Combinación Lineal al neutro de la operación suma.* ***Objeto***	*Construye ejemplos de espacios vectoriales que satisfacen condiciones dadas, haciendo uso de la estructura subyacente.* ***Objeto***
Las operaciones suma y multiplicación por escalar son consideradas las usuales. ***Proceso***	*Las operaciones suma y multiplicación por escalar no siempre son las usuales.* ***Objeto***	*Las operaciones suma y multiplicación por escalar no siempre son las usuales.* ***Objeto***

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Siglo XXI.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.